УТОЧНЕНИЕ РЕШЕНИЯ ШВАРЦШИЛЬДА

Ихлов Б. Л.

Аннотация
Показано, что решение Шварцшильда неполно и может не иметь сингулярности. Рассмотрены типы неустойчивости черной дыры. Показано, что в СТО вращение может остановить коллапс.
Ключевые слова: решение Керра-Ньюмена, взрыв, устойчивость

Введение

Утверждается, что решение Шварцшильда для параметра отрицательной массы имеет голую сингулярность в фиксированном пространственном положении. Однако ничто не мешает поменять знак массы, с учетом того, что единица соответствует кинетической энергии:

$$ds^2 = -(1-r_g/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + (1-r_g/r)dt^2$$

Получаем, что сингулярность сохраняется.
Можно решить уравнение Шварцшильда с отрицательной массой, не нарушая энергетических условий. Отрицательная масса может возникать из-за области пространства, в которой составляющая напряжения тензора энергии-импульса больше по величине, чем плотность массы.
Подобные решения слабо рассмотрены.
Выпишем метрику сферического тела

$$ds^2 = A(r,t)dt^2 - B(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - C(r,t)dr^2$$

Подобно стационарному уравнению Шредингера, которое не допускает переходом электронов в атоме с орбиты на орбиту, решение Шварцшильда тоже является стационарным, коэффициенты A, B, C не зависят от времени. Поэтому ожидать от него каких-то качественных переходов типа взрыва в процессе сжатия не приходится.
Ситуация подобна термодинамике: при критических температурах теплоемкости обращаются в бесконечность, но на уравнении это никак не сказывается, скажем, в адиабате бесконечности сокращаются.
Так или иначе, в метрике Шварцшильда не отражен баланс между давлением и притяжением, отсутствует скачкообразная зависимость сжатия от массы звезды.
Масса солнца 10^{30} кг, масса черной дыры – порядка 1 массы Солнца. Масса нейтрона - 10^{-27} кг
Радиус нейтрона – 10^{-15} м. Радиус Шварцшильда для нейтрона – 2 х 10^{-27} х 7 х 10^{-11} = 10^{-37} .
Плотность пульсаров 2,8 х 10^{14} г/см куб = 10^{17} кг/м^3 . Плотность в центре 10^{18} кг/м^3 . больше плотности атомного ядра. Радиус ядра атома гелия 2 х 10^{-13} м. Число нейтронов в нейтронной звезде, что по порядку величины равно числу нейтронов коллапсирующей звезде – $10^{30} : 10^{-27} = 10^{57}$.
Чтобы радиус Шварцшильда совпадал с радиусом нейтронного объекта, необходимо, чтобы $r_n \sim 10^{-13}\ N^{1/3} \sim (G\ N\ m)/c^2$, откуда $N \sim 10^{54}$, на 3 порядка меньше. Дефект масс не меняет порядки величин. Данный расчет ставит под сомнение смысл такого параметра, как радиус Шварцшильда.

Добавления к решению Шварцшильда

Существуют обобщения решение Шварцшильда — для статической аксиально-симметричной системы, для гравитационных мультиполей. Также существует глобальное решение Шварцшильда, метрика для него вне горизонта используется для описания гравитационного поля звёзд, а также солнечной системы.
Первое упрощение, которое делают, чтобы получить метрику массивного шара - ее диагонализация. В результате получаются две неопределенные константы.

$$ds^2 = Adr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 - Bdt^2$$

Условие, определяющее одну и констант – то. что на больших расстояниях метрика должна переходить в метрику Минковского. Вторая константа определяется, если принять приближение слабого поля

$$g_{44} \approx -c^2 + 2Gm/r$$

В [1] указывается, что при выводе решения Шварцшильда для определения констант в метрике используется то, что на бесконечности метрика становится плоской. Тогда как в [1, стр. 362] в законе сохранения учитывается псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля.
Но не указывается, что для дальнейшего определения констант используется второе приближение: то, что в уравнение для их определения подставляется классическая потенциальная энергия под действием силы тяжести с коэффициентом 2. То есть: метрику планковской Вселенной, чей радиус меньше радиуса

Шварцшильда, можно описать решением Шварцшильда, поскольку это решение справедливо для любых сферически симметричных тел. Для слабого поля потенциал для уравнения движения имеет вид:

$$\varphi = -c^2(1+g_{44})/2\,,\ \varphi(r) = -\frac{Gm}{r} + C$$

$$\Delta\varphi = \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 r} = 4\pi Gm; a \square -\nabla\varphi\,.$$

В пост-ньютоновском приближении

$$a = -\nabla\varphi + q(\nabla\varphi)^2\ ,\quad (\nabla\varphi)^2 = \frac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \varphi\Delta\varphi\ ,\ a = -\nabla\varphi + 4\pi qm\varphi = g = Gm/r^2 + 4\pi qGm/r\ .\ \text{So.}$$

$$g = \frac{4}{3}\pi G\rho r(q+r)$$

Тогда метрика примет вид:

$$ds^2 = (1 - r_g/r + c_1)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 - (1 - r_g/r + c_1)dt^2$$

Релятивистская добавка к силе тяготения $F_{add} \sim 1/r^4$. Ее учет приводит к метрике

$$ds^2 = (1 - r_g/r + c_2/r^3)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 - (1 - r_g/r + c_2/r^3)dt^2$$

Утверждается, что при превышении предельной скорости вращения радиус становится комплексным

$$r_\pm = r_S \pm \sqrt{r_S{}^2 - a^2}; a = J/mc; r_S = Gm/c^2$$

метрика является регулярной для всех положительных значений , что должно означать, что сингулярность не имеет горизонта событий [2].

Чтобы вращение остановило коллапс, его энергия должна превысить тяготение. В классической механике

$$J\omega^2/2 \geq Gm^2/r$$

Тогда чтобы тяготение был остановлено вращением, скорость на сфере должна быть больше 5/2 скорости света. Если использовать ограничение Керра - Ньюмена

$$(L/m)^2 = (mr^2\omega/5m) \geq G^2m^2/c^2$$

то скорость на поверхности тоже должна быть больше скорости света

$$v \geq \sqrt{5}c$$

Следовательно, в классической физике нет такого вращения, которое бы останавливало коллапс.

Так или иначе, нужно добавить энергию вращения в метрику: $c_3 r^2$.

Кроме этого. Есть еще давление внутри сжимающейся звезды, пропорциональное плотности энергии

$$p \sim \varepsilon \sim 1/r^3$$

Давление дает вклад в метрику *1/r* .

При образовании черной дыры давление вырожденного нейтронного газа не исчезает, оно возрастает,

Теперь нужно учесть, что для планковской Вселенной в приближении слабого поля ее масса покоя равна и противоположна по знаку массе гравитационной энергии [3]. Тогда (1) примет вид

$$g_{00} = g_{33}{}^{-1} = 1 - r_g/r - c_2/r^3 + c_2r^2 + c_3/r = 1 - (2r_g/r - c_3)/r - c_2/r^3 + c_3r^2 \quad (1)$$

В таком случае сингулярность должна быть в точке

$$1 - (2r_g/r - c_3)/r - c_2/r^3 + c_3r^2 = 0$$

Данное уравнение, имеет комплексные решения при высоких давлениях и вещественные решения при низких давлениях, что очевидно. Давление играет ту же роль, что и вращение, соответственно, существует критическое давление.

Отметим: в знаменателе у коэффициента g_{00} – может быть (1 + …), т.е. это эффективная отрицательная гравитационная масса – при положительной инертной массе.

Для вакуума инертная масса равна нулю, поэтому при высоких плотностях вакуума сингулярность отсутствует.

Взрыв черной дыры

В инфляционной модели взрыв происходит из-за большой постоянной Хаббла, пространство «расталкивается» неким скалярным полем (полями), которое порождает (порождают) частицы.

Есть модели Большого взрыва как распада элементарной частицы.

В модели Ли Смолина-Патриа-Гуда Вселенная произошла от взрыва в черной дыре. Однако не предложен механизм взрыва.
Согласно гипотезе Ли Смолина, «по ту сторону» черной дыры возникает новая вселенная.
Космология черной дыры, или космология Шварцшильда, позволяет такую теорию, что наблюдаемая Вселенная может находиться внутри черной дыры, существующей в более крупной родительской Вселенной (Раджем Патриа и математик Ирвин Гуд). Они предположили, что горизонт событий черной дыры — граница, внутри которой ничто не может покинуть черную дыру — совпадает с границей наблюдаемой Вселенной.
Никодем Поплавский объяснил, что черные дыры могут порождать «мультивселенные». Он считал, что когда материя в черной дыре достигает состояния чрезвычайно высокой плотности, она не сжимается до сингулярности, а отскакивает и начинает расширяться, подобно сжатой пружине. Этот процесс может объяснить механизм Большого взрыва.
1. Выбросы материи возникают, когда чёрная дыра поглощает слишком большое количество вещества, что приводит к ярким и легко наблюдаемым вспышкам излучения. Но это не является взрывом.
Есть версия, что по мере испарения черной дыры ее масса становится меньше критической, тогда она взрывается – вследствие исчезновения горизонта событий. Но эта версия не подтверждена теоретически, механизм неясен. Если же учесть эффекты специальной теории относительности [4], то

$$L = \frac{2}{5} mR^2\omega + \frac{4mR^4\omega^3}{35c^2}$$

При $R\omega \to c$

$$L = \frac{3}{4} mRc$$

В этом случае предельная скорость, при которой коллапс останавливается, существует:

$$v = 2c/3$$

В этом случае коллапсирующая звезда не теряет сингулярность, а ее разрывает на части, звезда взрывается – но не так, как обычная звезда, а именно как черная дыра.
Голая сингулярность возникает, если черная дыра по каким-либо причинам начинает вращаться быстрее, вследствие чего центробежные силы становится больше центростремительных гравитационных сил. Но если центробежные силы изначально больше гравитационных, не образуется ни голой сингулярности, ни сингулярности вообще.

2. Может ли черная дыра взорваться вследствие какого-либо типа неустойчивости? Линеаризованные уравнения Эйнштейна в случае нулевой кривизны устойчивы относительно возмущений метрики.
Одна из основных сложностей с доказательствами устойчивости решения Шварцшильда связана с отслеживанием происходящего в четырёхмерном пространстве-времени во время эволюции решения. Вам необходима система координат, позволяющая измерять расстояния и определять точки в пространстве-времени, такие, как линии широты и долготы, используемые для определения местоположения на Земле. Но непросто найти систему координат, работающую в каждой точке пространства времени, и продолжающую работать, когда форма пространства-времени меняется.
В контексте теории устойчивости чёрной дыры, любая используемая система координат должна развиваться так же, как форма пространства-времени – как удобная перчатка подстраивается под изменение формы руки. Соответствие между системой координат и пространством-временем должно быть хорошим вначале и оставаться хорошим всю дорогу. Если это не так, то может случиться две вещи, мешающие попыткам доказать наличие устойчивости.
В [5] доказано, что медленно вращающиеся ЧД устойчивы.
Возможно, неустойчивость вблизи критической скорости вращения звезды возникает из-за квантовых флуктуаций, что может привести к взрыву черной дыры.

3. Хокинг полагал, что горизонта событий вокруг черной дыры вообще не существует. Квантовые эффекты, возникающие вблизи чёрной дыры, вызывают резкие пространственно-временные флуктуации, и эти колебания настолько велики, что строгая граница, вроде горизонта событий, просто не может возникнуть. Эту версию нужно отбросить, т.к. квантовые флуктуации не могут привести к макроскопическим флуктуациям. Однако есть вероятность, что черная дыра может взорваться вследствие неустойчивости вблизи критической скорости вращения.

4. Есть предположение, что сверхмассивные черные дыры в центрах галактик не растут бесконечно – они могут достигнуть массы в 50 миллиардов Солнц, после чего их диск аккреции распадется.
Однако из (1) следует, что вблизи нуля функция зависимости массы от радиуса не имеет максимума. То есть, не должно быть ограничений на массу черной дыры.
Но есть экспериментальные доказательства того, что есть верхний предел масс черных дыр [6-8].
Неясно, какой именно физический фактор может ограничивать массу черных дыр. Но к этому вопросу примыкает версия, что Вселенная находится внутри черной дыры. Действительно, если следовать общепринятой оценке массы Вселенной, ее видимые размеры совпадают с ее гравитационным радиусом. С другой стороны, планковская Вселенная – это черная дыра. Ли Смолин предлагал модель, в которой Вселенная возникает при взрыве черной дыры. Предполагается, что планковская Вселенная - голая сингулярность, без горизонта событий. Возможно, что черные дыры взрываются в том случае, если их радиус вдвое меньше радиуса Шварцшильда, как в планковской Вселенной.

5. Пенроуз предположил, что частицы, проходящие вблизи горизонта событий, могут забирать часть вращательной энергии чёрной дыры. Позже Зельдович доказал, что схожее явление возможно и без участия чёрной дыры — например, в эксперименте с быстро вращающимся металлическим цилиндром и светом. Если окружить такой цилиндр зеркалом, то энергия, усиленная за счёт вращения, может накапливаться и приводить к мощному выбросу — «взрыву», т.н. «бомба черной дыры». Это было доказано и экспериментально.

6. Взрыв черной дыры возможен и в том случае, если она не вращается.

$$p \sim \varepsilon \sim 1/r^3$$

Давление дает вклад в метрику $1/r$.
При образовании черной дыры давление вырожденного нейтронного газа не исчезает, оно возрастает. Если вокруг черной дыры закончился межзвездный газ, тогда испарение черной дыры может привести к неустойчивости, когда ее масса становится бесконечно приближенной к критической, необходимой для образования черной дыры. Тогда внутреннее давление разрывает черную дыру.

Заключение
Несмотря н длительную историю исследований решений Шварцшильда, изучение черных дыр и их эволюции начинается с самого начала.

Литература
1. Ландау Л. Л., Лившиц Е. М. Курс теор. физ. Т. 2. Теория поля. М., Физматлит, 2003. 536 с.
2. Hobson, et. al, General Relativity an Introduction for Physicists, Cambridge University Press 2007, p. 300-305.
3. Ихлов Б. Л. Ненулевая масса Вселенной
https://zmclub.ru/blog/boris-ikhlov/1679-nenulevaya-massa-vselennoj
4. Ихлов Б. Л. К гипотезе возникновения Вселенной из квантовой флуктуации.
Материалы VII Российской конференции «Основания фундаментальной физики и математики». 8–9 декабря 2023 года, Москва, РУДН. С. 178-187.
5. Peter Hirtz, Andras Vasy. The global non-linear stability of the Kerr-de Sitter family of black holes.
Acta Mathematica, 220:1-206, 2018. V. 2290(2018). N1. P. 1-206. http^//doi.prg/10.4310/acta.2018.v220.nl.al
6. Priyamvada Natarajan, Ezequiel Treister. Is there an upper limit to black hole masses? Mon. Not. R. Astron. Soc. 000, 000–000 (0000), 22 October 2018. http://doi.org/10.48550/arXiv.0808.2813
7. Andrew King. How Big Can a Black Hole Grow? Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, Volume 456, Issue 1, December 2015, Pages L109–L112, https://doi.org/10.1093/mnrasl/slv186
8. Bernard Carr, Florian Kuhnel, Luca Visinelli. Constraints on Stupendously Large Black Holes
Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 501, Issue 2, February 2021, Pages 2029–2043, https://doi.org/10.1093/mnras/